

**Magdalena Rucka
Stanisław Burzyński
Agnieszka Sabik**

MACIERZOWA ANALIZA KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH

W ŚRODOWISKU MATLAB®

Gdańsk 2020

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ
Dariusz Mikielewicz

RECENZENT
Marek Skowronek

PROJEKT OKŁADKI
Erwin Wojtczak

Wydanie I – 2018

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
<https://www.sklep.pg.edu.pl>

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie
i w jakikolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2020

ISBN 978-83-7348-749-9

SPIS TREŚCI

OD AUTORÓW	5
1. ZAGADNIENIA WSTĘPNE	7
1.1. Metoda przemieszczeń w ujęciu klasycznym	7
1.2. Wzory transformacyjne metody przemieszczeń.....	9
1.2.1. Teoria I rzędu	9
1.2.2. Teoria II rzędu.....	14
1.2.3. Belka na podłożu sprężystym.....	18
1.3. Macierz sztywności i podatności układu.....	21
1.3.1. Macierz sztywności układu	22
1.3.2. Macierz podatności układu.....	23
1.3.3. Własności globalnych macierzy sztywności i podatności	24
2. MACIERZOWA METODA PRZEMIESZCZEŃ.....	28
2.1. Wprowadzenie	28
2.2. Dyskretyzacja układu konstrukcyjnego	28
2.3. Macierze sztywności elementu	31
2.3.1. Macierz sztywności elementu ściskanego/rozciąganego	31
2.3.2. Macierz sztywności elementu kratowego	32
2.3.3. Macierz sztywności elementu belkowego	33
2.3.4. Macierz sztywności elementu ramowego	36
2.3.5. Macierz sztywności elementu belkowego z uwzględnieniem wpływu odkształceń postaciowych.....	37
2.3.6. Macierz sztywności elementu belkowego na podłożu sprężystym typu Winklera	38
2.4. Uwzględnianie obciążeń przęsłowych	38
2.5. Kondensacja i modyfikacja macierzy sztywności elementu	39
2.5.1. Kondensacja statyczna	40
2.5.2. Modyfikacja	43
2.6. Transformacja układu współrzędnych	45
2.6.1. Transformacja elementu kratowego	45
2.6.2. Transformacja elementu ramowego	47
2.7. Agregacja macierzy sztywności i wektora obciążeń węzłowych	48
2.8. Uwzględnianie więzi sprężystych.....	52
2.9. Algorytm macierzowej metody przemieszczeń	54
2.9.1. Algorytm ogólny	54
2.9.2. Algorytm dla elementu belkowego.....	54
2.9.3. Analiza statyczna układu na podłożu sprężystym, metoda uproszczona	56
3. ZADANIA: ANALIZA STATYCZNA UKŁADÓW PRĘTOWYCH.....	57
Zadanie 3.1	57

Zadanie 3.2	60
Zadanie 3.3	67
Zadanie 3.4	70
Zadanie 3.5	72
Zadanie 3.6	75
Zadanie 3.7	78
Zadanie 3.8	82
Zadanie 3.9	85
Zadanie 3.10	88
Zadanie 3.11	94
Zadanie 3.12	97
Zadanie 3.13	103
Zadanie 3.14	112
Zadanie 3.15	120
Zadanie 3.16	127
Zadanie 3.17	134
Zadanie 3.18	137
Zadanie 3.19	150
Zadanie 3.20	155
Zadanie 3.21	162
4. ZADANIA: ANALIZA STATECZNOŚCI UKŁADÓW PRĘTOWYCH. TEORIA II RZĘDU	170
4.1. Podstawy teoretyczne	170
4.2. Algorytmy obliczeniowe.....	172
Zadanie 4.1	173
Zadanie 4.2	178
Zadanie 4.3	181
Zadanie 4.4	186
Zadanie 4.5	189
5. ZADANIA: ANALIZA MODALNA UKŁADÓW PRĘTOWYCH	197
5.1. Podstawy teoretyczne	197
5.2. Algorytmy obliczeniowe.....	198
Zadanie 5.1	200
Zadanie 5.2	204
ZAŁĄCZNIK A: Wyjściowe siły przywęzłowe	211
ZAŁĄCZNIK B: Tablica całkowania graficznego	215
ZAŁĄCZNIK C: Wyprowadzenia macierzy elementowych z użyciem funkcji kształtu	216
C.1. Macierz sztywności elementu belkowego	219
C.2. Macierz sztywności elementu belkowego z uwzględnieniem odkształceń postaciowych....	223
C.3. Macierz sztywności elementu belkowego na podłożu typu Winklera	228
C.4. Macierz geometryczna elementu belkowego	231
C.5. Macierz mas elementu belkowego i ramowego	233
ZAŁĄCZNIK D: Lista używanych funkcji	235
LITERATURA	245

OD AUTORÓW

Niniejsza książka poświęcona jest metodzie przemieszeń w ujęciu macierzowym, znanej także pod nazwą bezpośredniej lub komputerowej metody przemieszczeń. Podejście to jest szczególnym przypadkiem metody elementów skończonych (MES), która jest od wielu lat powszechnie stosowana w działalności inżynierskiej, w tym do analizowania różnorodnych problemów mechaniki. Metoda przemieszczeń jest dedykowana rozwiązywaniu układów prętowych. Podstawową zaletą tej metody jest prostota podstaw teoretycznych, które omawiane są podczas kursów mechaniki budowli i wytrzymałości materiałów. Nie jest w tym przypadku wymagana niezbędna wiedza z zakresu mechaniki ośrodków ciągłych. Z tego względu metoda przemieszczeń nadal stanowi doskonałą podstawę do nauki metod komputerowych w mechanice konstrukcji. W dobie rozkwitu komercyjnych programów MES przyswojenie podstaw komputerowego rozwiązywania problemów mechaniki jest kluczowe dla ich efektywnego wykorzystywania.

Zakres opracowania obejmuje opis teoretyczny oraz praktyczne przykłady problemów statyki, stateczności oraz analizy modalnej układów prętowych w formie zadań i przykładowych rozwiązań w środowisku MATLAB[®]¹. Wybrane fragmenty programów umieszczono w tekście, a wszystkie programy i procedury dostępne są pod adresem internetowym <http://wilis.pg.edu.pl/kwm/ksiazki>

Autorzy wyrażają podziękowanie mgr. inż. Łukaszowi Pachockiemu i mgr. inż. Erwinowi Wojtczakowi za pomoc przy sprawdzeniu wszystkich zadań. Podziękowania kierujemy także do doc. dr. inż. Marka Skowronka za rzeczową i wnikliwą recenzję.

Wszystkim Czytelnikom będziemy wdzięczni za krytyczne uwagi i sugestie dotyczące niniejszej książki.

Książkę dedykujemy pamięci naszego Nauczyciela, Profesora Czesława Jacka Branickiego, od którego nauczyliśmy się tego, czym dzielimy się w tej książce.

*Magdalena Rucka
Stanisław Burzyński
Agnieszka Sabik*

¹ MATLAB[®] jest znakiem towarowym zarejestrowanym przez The MathWorks Inc.